

# Előrejelzések készítése Fuzzy-Markov alapú idősor-elemzés alapján

Hanka László

Óbudai Egyetem, Bánki Donát Gépész és Biztonságtechnikai Mérnöki Kar, Természettudományi és Alapozó  
Tantárgyi Intézet; Nemzeti Közszolgálati Egyetem, Hadtudományi és Honvédtisztisképző Kar,  
Természettudományi Tanszék, Magyarország  
hanka.laszlo@bgk.uni-obuda.hu, hanka.laszlo@uni-nke.hu

**Összefoglalás** — Az élet, az alkalmazott és egzakt tudományok számos területén találkozunk idősorokkal. E témában az az alapvető kérdés, hogy hogyan lehetséges a megfigyelések során kapott adatsorra egy olyan matematikai modellt felállítani, amely a felhasználó által előírt hibahatáron belül szolgáltatja a megfigyelt adatokat is és amely modell alapján előrejelzéseket lehet adni az idősor további adataira a megfigyeléseket követő néhány időpontjára vonatkozólag. A témakörben számos módszer fellelhető a szakirodalomban. Ebben a cikkben két nagy horderejű matematika elméletnek, a Markov-láncok elméletének és a Fuzzy logikának az egyesítésével kapott modellel, egy speciális Fuzzy-Markov folyamattal fogjuk modellezni az idősort és ennek alapján adunk majd előrejelzést a jövőre nézve.

**Kulcsszavak:** idősor-elemzés, előrejelzés készítés, Markov-lánc, Fuzzy-logika, Fuzzy mátrix-aritmetika, Fuzzy-Markov folyamat

beiratkozott hallgatók számának a becslését, előrejelzését, stb.

A szakirodalomban számos módszer található amely ezt a problémakört tárgyalja. Tekintettel a SzaFARi konferencia tematikájára, ebben a cikkben egy fuzzy logika alapú matematikai modellt mutatunk be melynek struktúráját a sztochasztikus folyamatok elméletének, pontosabban a Markov-láncok elméletének segítségével fogjuk kialakítani.

A cikkben egy idősor bemutatása után a Markov-folyamatok elméletének alapgondolatait ismertetjük, mint alapvető eszközt, utána a 4. pontban annak a leírása következik, hogy hogyan alkalmazható idősorokra a fuzzy logika. Ezután az 5. pontban az említett két elmélet ötvözeteként a fuzzy-Markov folyamat idősorokra történő alkalmazása következik, amely a cikk lefontosabb része, végül pedig a 6. pontban a bemutatott elmélet alkalmazását mutatjuk be a bevezetőben megadott idősor adatokra vonatkozólag.

## 1 BEVEZETÉS

Az egzakt és alkalmazott tudományok, a gazdasági de még a hétköznapi élet is számos területen kínál példákat idősorokra [1], [2], [3]. Egyszerűen fogalmazva az idősor, ideális esetben, azonos időközönként végzett megfigyelések sorozata. Ilyen például egy részvény napi árfolyama, egy repülőtér napi utasforgalma, egy ország évi gabonaexport mennyisége, a hőmérséklet napi/havi átlagértéke vagy maximális értéke egy adott földrajzi helyen, egy egyetemre évente beiratkozott hallgatók száma, stb.

Minden egyes esetben az az első feladat, hogy a megfigyeléssel kapott adatsort analizáljuk, egy olyan matematikai modellt készítünk, amely a megfigyelések adatsorát elfogadható hibahatáron belül szolgáltatja. Ez tekinthető a matematikai modell tesztjének. Ha ez jól működik, ami azt jelenti, hogy a modell a felhasználó által előírt hibahatáron belül szolgáltatja a megfigyelési adatokat, akkor a modell segítségével extrapolálunk, azaz olyan jövőbeli időpontokra vonatkozólag adunk előrejelzést, jósolatot, amelyre vonatkozólag értelem-szerűen még nem volt megfigyelés.

A fenti példák esetében ez tehát jelentheti egy részvény árfolyamát vagy a repülőtér utasforgalmát néhány napra előre, egy ország következő évi gabona exportját, jelentheti a következő napi/havi átlag vagy maximális hőmérsékletet az adott helyen, vagy a jövő évben egy egyetemre

## 2 A VIZSGÁLT IDŐSOR BEMUTATÁSA

Mielőtt bemutatnánk az alkalmazott elméletet, lássunk egy példát idősorra.

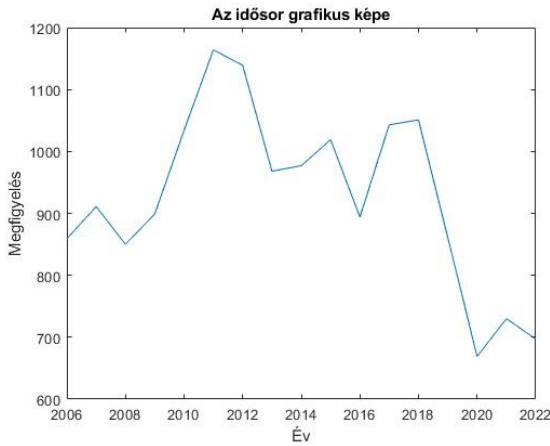
1. táblázat: A vizsgált idősor adatai és az adatok megváltozása

Sorszám	Év	Adat ( $y_n$ )	Változás ( $Dy_n$ )
1	2006	859	
2	2007	911	52
3	2008	850	-61
4	2009	899	49
5	2010	1034	135
6	2011	1164	130
7	2012	1139	-25
8	2013	968	-171
9	2014	977	9
10	2015	1019	42
11	2016	894	-125
12	2017	1043	149
13	2018	1051	8
14	2019	861	-190
15	2020	669	-192
16	2021	730	61
17	2022	697	-33

Az idősor legyen egy teljesen hipotetikus adatsor, amely nem kötődik közvetlenül semmilyen konkrét megfigyeléshez, így koncentrálnunk tisztán a matematikai módszerekre függetlenül attól mit is jelentenek konkrétan a megfigyelési adatok. Legyen az idősor az 1. táblázatban közölt adatsor.

Felvettünk tehát hipotetikus adatokat ( $y_n$ ) 2006 és 2022 között minden évben, tehát feltesszük, hogy az elmúlt 17 évre vonatkozólag vannak megfigyelések. Ez jelenti a rendelkezésre álló idősort. Feladat előrejelzést készíteni a következő évekre, tehát 2023., 2024., ... stb. évekre. A táblázatban feltüntettük nem csak a megfigyelést, hanem a megfigyelt adatok évenkénti változását is a  $Dy_n = y_n - y_{n-1}$  különbséget, ugyanis, mint a következő pontokból kiderül, a Fuzzy-Markov modellnek [4], [5] éppen ez a különbség képezi az alapját.

Célszerű az idősort szemléltetni. Az 1. ábrán látható az idősor grafikus képe.



1. ábra

A hagyományos idősor elemzési eljárások [1], [3] első lépése az lenne, hogy megvizsgáljuk az idősort, van-e benne tipikus trend, azaz növekedés vagy csökkenés, illetve tapasztalható-e szezonális, más szóval van-e periodikus összetevője az idősornak. A grafikus kép segít ennek eldöntésében. Ha van akkor a szokásos módszertan ezen komponensekre való additív felbontás, dekompozíció lenne. Mint látható ebben az esetben egyik viselkedésforma sem jellemző. Azonban a Fuzzy-Markov alapú elemzési módszer ezeket a tulajdonságokat nem is kell hogy hangsúlyozza. Ez a modell a  $Dy_n$  különbségek osztályokba sorolásával jellemzi az idősort. A módszer első lépése a Markov-lánc segítségével történő leírás. A Markov-láncok elmélete releváns részének bemutatása következik a 3. pontban.

### 3 MARKOV-LÁNCOK

Diszkrét idejű Markov-láncnak [6], [7], [8] nevezünk egy sztochasztikus folyamatot, ha az rendelkezik az "emlékezet nélküli" tulajdonsággal. Azaz ha egy sztochasztikus folyamat adott  $n$  időpontbeli állapotának valószínűség eloszlása csak a közvetlenül megelőző  $n - 1$  időpontbeli állapottól függ és független minden korábbitól. Ezt a tulajdonságot az alább formulával szokás értelmezni:

$$P(S_n | S_{n-1}, S_{n-2}, \dots, S_1) = P(S_n | S_{n-1}) \quad (1)$$

melynek jelentése a következő. Annak az eseménynek a feltételes valószínűsége, hogy az  $n$  időpontban a rendszer az  $S_n$  állapotban van kizárólag az  $n$  időpontot közvetlenül megelőző  $n - 1$  időpontbeli  $S_{n-1}$  állapottól függ és nem függ korábbi állapotoktól. Ezen feltétel teljesülése esetén az egymást követő időpontokban a Markov-lánc diszkrét valószínűség eloszlásait az alábbi formulával tudjuk leírni:

$$\pi_{n+1} = \pi_n \mathbf{R}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

ahol a  $\pi_0; \pi_1; \pi_2; \dots; n = 0, 1, 2, \dots$  sorvektorok a Markov-lánc diszkrét valószínűség eloszlásai az egymást követő időpontokban, az  $\mathbf{R}$  mátrix pedig a folyamat ún. átmeneti valószínűség mátrixa. Példaként legyen az  $\mathbf{R}$  mátrix az alábbi  $3 \times 3$ -as mátrix

$$\begin{matrix} & \text{hova} \\ \text{honnan} & \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3)$$

Ez a mátrix egy olyan folyamatot ír le amelynek 3 állapota van, és az egyes állapotok közötti átmenetek valószínűségei találhatóak a mátrix soraiban olyan értelemben, hogy a sorok jelképezik az induló állapotot ("honnan") és az oszlopok a végállapotot ("hova"). Következésképpen minden sor egy diszkrét valószínűség eloszlás, ami miatt ezt a mátrixot sztochasztikus Markov mátrixnak nevezzük. Ha feltételezzük, hogy a rendszer a kiinduló állapotban a  $\pi_0 = [1 \ 0 \ 0]$  eloszlással adott, akkor a (2) formula szerint a diszkrét idejű Markov-lánc a következő időpontokban az alábbi diszkrét eloszlásokkal írható le:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \pi_0 \mathbf{R} = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{bmatrix} = [0,5 \ 0,3 \ 0,2]; \\ \pi_2 &= \pi_1 \mathbf{R} = [0,5 \ 0,3 \ 0,2] \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{bmatrix} = [0,48 \ 0,24 \ 0,28]; \\ \pi_3 &= \pi_2 \mathbf{R} = [0,48 \ 0,24 \ 0,28] \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{bmatrix} = [0,472 \ 0,252 \ 0,276]; \end{aligned} \quad (4)$$

stb.

Ez a valószínűség eloszlás sorozat – sztochasztikus folyamat – mutatja hogyan változik a rendszer eloszlása az egyes állapotok között ahogy múlik az idő.

A továbbiakban az idősor elemzés egy olyan módszerét mutatjuk be, amely a diszkrét idejű Markov-láncok fent bemutatott struktúráját és logikáját alkalmazza, természetesen bizonyos értelemben általánosított formában. A kérdés az lesz, hogy egy idősor esetében mit tekintünk állapotnak és hogy mit jelent az állapotok közötti átmenet és végül a legfontosabb kérdés nyilván az lesz, hogy mi az átmeneti valószínűség mátrix megfelelője idősor kontextusban. Ezeket a kérdéseket tisztázzuk a következő pontokban.

#### 4 A FUZZY LOGIKA ALKALMAZÁSA IDŐROKRA

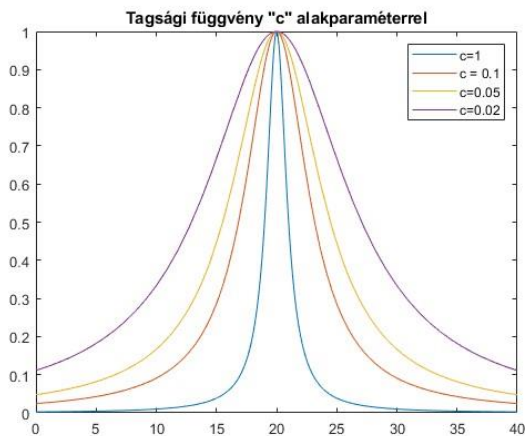
A következő lépés a fuzzy logika alkalmazása, a fuzzifikálás [9], [10]. Alapvető kérdés, hogy mire vonatkozólag definiálunk fuzzy halmazokat. Visszatekintve az 1. táblázatra, abban azért szerepelnek a  $Dy_n$  megváltozások, mert az alapgondolat az, hogy nem az idősor megfigyelt értékeire vonatkozólag, hanem a változások értékeire vonatkozólag definiálunk fuzzy halmazokat. Figyelembe véve a táblázatbeli változás-értékeket, kialakítunk hét egyenlő hosszúságú intervallumot az alábbi lingvisztikai változókkal:

- [-200,-150]: Drasztikus csökkenés
- [-150,-100]: Jelentős csökkenés
- [-100,-50]: Számottevő csökkenés
- [-50, 0]: Enyhe csökkenés
- [0, 50]: Enyhe növekedés
- [50,100]: Számottevő növekedés
- [100,150]: Jelentős növekedés

Ezután eldöntjük, hogy milyen típusú tagsági függvényeket rendelünk a fenti változókhöz [9], [11]. Ebben a dolgozatban az alábbi függvény alkalmazását javasoljuk:

$$\mu(x) = \frac{1}{1 + c \cdot (x - m)^2}; \quad (5)$$

ahol  $c$  egy alak- vagy skálaparaméter,  $m$  pedig egy középérték, amelyre a görbe szimmetrikus. A függvény grafikus képe különböző  $c$  értékek és azonos  $m = 20$  középérték esetén látható a 2. ábrán.



2. ábra

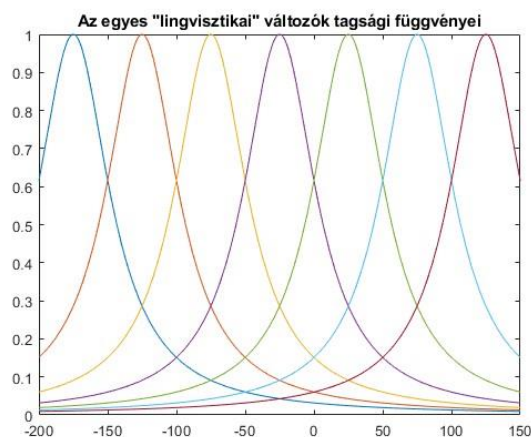
A javasolt függvény előnye, túl azon hogy könnyen kódolható az, hogy a  $c$  paraméter változtatásával egyszerűen "hangolható". Mint könnyen látható, ha a paraméter értéke növekszik a görbe egyre jobban koncentrálódik az  $m$  középérték körüli környezetre, így a többi lingvisztikai változó hatása egyre jobban kiküszöbölhető, míg fordítva ha a paraméter értéke csökken a lingvisztikai változók egymásra hatása egyre dominánsabb. Mint a cikk végén látni fogjuk, ez egy nagyon hasznos tulajdonsága ennek a tagsági függvénynek,

mert mint kiderül, a  $c$  paraméter értéke jelentősen befolyásolja az idősorra illeszkedő matematikai modell pontosságát, a  $c$  paraméter értékének csökkentése jelentősen növeli a pontosságot.

A továbbiakban tehát az (5) képlettel értelmezett tagsági függvényt fogjuk alkalmazni a fentiekben definiált hét intervallum mindegyikére:

$$\mu_k(x) = \frac{1}{1 + c \cdot (x - m_k)^2}; \quad k = 1, 2, \dots, 7; \quad (6)$$

ahol  $c$  természetesen ugyanaz a skálaparaméter mindegyik intervallumra,  $m_k$  pedig a  $k$ -adik intervallum középértéke. A kapcsolódó fuzzy halmazok jelölésére az  $A_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 7$ ) jelölést fogjuk alkalmazni. A 3. ábrán látható a hét intervallumra vonatkozólag a tagsági függvények rendszere,  $c = 0,0001$  skálaparaméter esetén.



3. ábra

A  $c$  paraméter értékének ezen megválasztását a későbbiekben indokoljuk.

2. táblázat: A vizsgált idősor változás adatainak fuzzifikálása

Sorszám	Év	Változás( $Dy_t$ )	Fuzzy halmaz( $A_k$ )
1	2006		
2	2007	52	$A_6$
3	2008	-61	$A_3$
4	2009	49	$A_5$
5	2010	135	$A_7$
6	2011	130	$A_7$
7	2012	-25	$A_4$
8	2013	-171	$A_1$
9	2014	9	$A_5$
10	2015	42	$A_5$
11	2016	-125	$A_2$
12	2017	149	$A_7$
13	2018	8	$A_5$
14	2019	-190	$A_1$
15	2020	-192	$A_1$
16	2021	61	$A_6$
17	2022	-33	$A_4$

A következő lépés az, hogy meghatározzuk az 1. táblázat szerinti  $Dy_i$  értékeknek mely fuzzy halmazhoz tartozik a maximális tagsági értéke. Ezen osztályozás szerint értelmezzük majd az idősor egyes "állapotait".

Ez után pedig az következik, hogy az idősort folyamatnak, állapotok közötti átmenetnek tekintjük, ahol az állapotokat azzal a fuzzy halmazzal jellemezzük, amelyben az adott változás maximális tagsági értékkel szerepel, az átmenet pedig azzal van figyelembe véve, hogy a változás értéke mely fuzzy halmazból mely fuzzy halmazba kerül.

Ezeket a tapasztalt átmeneteket, a kronológiai sorrend mellőzésével, láthatjuk az alábbiakban:

$$\begin{aligned}
 A_1 &\rightarrow A_1, A_5, A_6 \\
 A_2 &\rightarrow A_7 \\
 A_3 &\rightarrow A_5 \\
 A_4 &\rightarrow A_1 \\
 A_5 &\rightarrow A_1, A_2, A_5, A_7 \\
 A_6 &\rightarrow A_3, A_4 \\
 A_7 &\rightarrow A_4, A_5, A_7
 \end{aligned} \tag{7}$$

Az átmenetek időbeli sorrendje azért nincs figyelembe véve, azért indifferens, mert azok a fuzzy logikai műveletek, amelyeket majd alkalmazunk, kommutatívok, így a sorrendiség nem számít, csak az, hogy az idősor teljes egészét figyelembe véve, mely átmenetek voltak tapasztalhatóak.

## 5 FUZZY-MARKOV FOLYAMAT

Most következnek az a pont, amikor alkalmazni lehet a Markov-láncok elméletének (2) formulával leírható struktúráját és ötvözhetővé válik a fuzzy logika és a Markov-láncok elmélete [4], [5]. A kérdés az, hogy a (2) formulában szereplő  $\mathbf{R}$  átmeneti valószínűség mátrixnak mi a fuzzy megfelelője. Természetesen itt nem valószínűségek lesznek a mátrix elemei, hanem a definiált fuzzy halmazok felhasználásával értelmezzük az  $\mathbf{R}$  mátrix komponenseit az alábbiakban bemutatott eljárással. Cél, hogy az egész idősort jellemezzük egyetlen mátrix segítségével olyan módon, hogy az tartalmazzon információt az összes tapasztalt átmenetre vonatkozóan.

3. táblázat: Az  $A_1, A_2, \dots, A_7$  fuzzy halmazok a tagsági értékek vektoraként értelmezve

$A_1$	1,000	0,286	0,091	0,043	0,024	0,016	0,011
$A_2$	0,286	1,000	0,286	0,091	0,043	0,024	0,016
$A_3$	0,091	0,286	1,000	0,286	0,091	0,043	0,024
$A_4$	0,043	0,091	0,286	1,000	0,286	0,091	0,043
$A_5$	0,024	0,043	0,091	0,286	1,000	0,286	0,091
$A_6$	0,016	0,024	0,043	0,091	0,286	1,000	0,286
$A_7$	0,011	0,016	0,024	0,043	0,091	0,286	1,000

Ezért figyelembe vesszük a (7) átmeneteket és megállapodunk abban, hogy az egyes fuzzy halmazokat az egyes intervallumok középértékéhez tartozó tagsági értékek vektorával azonosítjuk. Az alábbi 3. táblázatban foglaltuk össze az ilyen módon kapott fuzzy halmazokat.

Ezek után következhet az  $\mathbf{R}$  átmenet matrix generálása az alábbi módszerrel. Figyelembe véve a (7) formulával figyelembe vett átmeneteket, ha létezik egy  $A_k \rightarrow A_j$  átmenet, akkor ennek az átmenetnek megfelelően, generálunk egy  $\mathbf{R}_{kj}$  mátrixot, amely a modell szerint magában foglalja az átmenetre jellemző információt numerikus adatok formájában. Ezt a mátrixot a klasszikus diadikus szorzat fuzzy matrix-aritmetikai megfelelőjével értelmezzük [9], [10], [11] az alábbi módon:

$$\begin{aligned}
 A_k \rightarrow A_j &\Rightarrow \mathbf{R}_{kj} = A_k^T \cap A_j \in \mathbf{R}^{n \times n}; \\
 &\text{azaz} \\
 \mathbf{R}_{kj}(m, p) &= \min(A_k(m); A_j(p))
 \end{aligned} \tag{8}$$

ahol a "T" felső index a transzponálás műveletét jelenti. Azonosítva a fuzzy halmazt a hozzá tartozó sorvektorral tehát arról van szó, hogy az  $A_k$  sorvektor transzponáltjaként kapott oszlopvektorok és az  $A_j$  sorvektorok készíttjük a diadikus szorzatát a szorzás műveletének fuzzy aritmetikai megfelelőjével a minimum operátorral. A művelet eredménye természetesen egy  $7 \times 7$ -es kvadratikuss mátrix.

Példaként a 2. táblázatban, sorrendben az első  $A_6 \rightarrow A_3$  átmenetnek megfelelő  $\mathbf{R}_{63}$  mátrix a következő:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{63} &= A_6^T \cap A_3 = \\
 &= \begin{bmatrix} 0,016 \\ 0,024 \\ 0,043 \\ 0,091 \\ 0,286 \\ 1,000 \\ 0,286 \end{bmatrix} [0,091 \ 0,286 \ 1,000 \ 0,286 \ 0,091 \ 0,043 \ 0,024] = \\
 &= \begin{bmatrix} 0,016 & 0,016 & 0,016 & 0,016 & 0,016 & 0,016 & 0,016 \\ 0,024 & 0,024 & 0,024 & 0,024 & 0,024 & 0,024 & 0,024 \\ 0,043 & 0,043 & 0,043 & 0,043 & 0,043 & 0,043 & 0,043 \\ 0,091 & 0,091 & 0,091 & 0,091 & 0,091 & 0,043 & 0,024 \\ 0,091 & 0,286 & 0,286 & 0,286 & 0,091 & 0,043 & 0,024 \\ 0,091 & 0,286 & 1,000 & 0,286 & 0,091 & 0,043 & 0,024 \\ 0,091 & 0,286 & 0,286 & 0,286 & 0,091 & 0,043 & 0,024 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Elkészítve a (7) formula szerinti összes átmenethez tartozó  $\mathbf{R}_{kj}$  mátrixot, a teljes idősor jellemzését azzal az  $\mathbf{R}$  mátrixszal írjuk le amelyet úgy kapunk, hogy képezzük az összes  $\mathbf{R}_{kj}$  átmenetmátrix összegét, azaz fuzzy értelemben a maximum operátort alkalmazzuk az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} &= \bigcup_{(k,j)} \mathbf{R}_{kj} \in \square^{n \times n} \\
 &\text{azaz} \\
 \mathbf{R}(m, p) &= \max_{(k,j)} (\mathbf{R}_{kj}(m, p))
 \end{aligned} \tag{10}$$

Elvégezve a fenti műveleteket az alábbi  $\mathbf{R}$  mátrixot kapjuk:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1,000 & 0,286 & 0,091 & 0,286 & 1,000 & 1,000 & 0,286 \\ 0,286 & 0,286 & 0,091 & 0,286 & 0,286 & 0,286 & 1,000 \\ 0,286 & 0,286 & 0,091 & 0,286 & 1,000 & 0,286 & 0,286 \\ 1,000 & 0,286 & 0,286 & 0,286 & 0,286 & 0,286 & 0,286 \\ 1,000 & 1,000 & 0,286 & 0,286 & 1,000 & 0,286 & 1,000 \\ 0,286 & 0,286 & 1,000 & 1,000 & 0,286 & 0,286 & 0,286 \\ 0,091 & 0,286 & 0,286 & 1,000 & 1,000 & 0,286 & 1,000 \end{bmatrix} \quad (11)$$

A bemutatott matematikai modellnek tehát az a lényege, hogy a teljes idősort vizsgáljuk, és a fentiekben bemutatott módon generált  $\mathbf{R}$  mátrix tartalmazza bizonyos értelemben a szükséges információkat az idősor egészére, annak alakulására vonatkozólag. Ezt a mátrixot használjuk fel a modellezésre és előrejelzés készítésére a továbbiakban.

Az idősor modellezéséhez első lépésben azt tesszük, hogy minden egyes évhez rendelünk egy vektort, amely az adott évbéli változás tagsági értékeinek vektora. Ha az  $n$ -edik évről van szó, akkor az  $A_n$  vektor előállítására az alábbi formula alapján számíthatjuk:

$$\mu_k(Dy(n)) = \frac{1}{1 + c(Dy(n) - m(k))^2};$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, 7; \quad (12)$$

$$n = 2006, 2007, \dots, 2022;$$

Rögzített  $n$  évhez minden  $k$ -ra kiszámítjuk a fenti értéket. Eredményképpen a 4. táblázatbeli vektorokat kapjuk:

4. táblázat: Az egyes évekhez rendelt fuzzy halmazok

A <sub>2006</sub>	0,019	0,031	0,058	0,144	0,587	0,654	0,158
A <sub>2007</sub>	0,071	0,196	0,836	0,436	0,119	0,051	0,028
A <sub>2008</sub>	0,020	0,032	0,061	0,154	0,653	0,597	0,148
...	...	...	...	...	...	...	...
A <sub>2021</sub>	0,047	0,106	0,362	0,940	0,229	0,079	0,039
A <sub>2022</sub>	0,940	0,286	0,286	0,286	0,362	0,286	0,286

Ezek után pedig az idősor modellezése a Markov-láncok elméletének analógiájképpen úgy történik, hogy egy adott  $n$  évbéli megfigyelt adatról a következő évi megjósolt adatra, tehát az előrejelzésre az

$$A_n = A_{n-1} \circ \mathbf{R};$$

$$A_{n-1} : \text{megfigyelés az } (n-1)\text{-edik évben} \quad (13)$$

$$A_n : \text{előrejelzés, jóslat az } n\text{-edik évben}$$

formula alapján térünk át, ahol  $\mathbf{R}$  a (10) és (11) szerinti mátrix, a "o" művelet pedig a mátrixok fuzzy típusú soroszlop szorzása a szokásos min-max műveletek alkalmazásával [9], [10], [12].

A (13) képlet alapján nyilvánvaló hogy jóslatként, előrejelzésként egy sorvektort, más szóval egy fuzzy halmazt kapunk. A (13) összefüggés tehát azt jelenti, hogy Markovi szemléletben az idősor egy "állapota" a 4. táblázatban látható és (12) formula alapján értelmezett fuzzy halmazzal értelmezhető. Az új "állapot" a következő

időpontban pedig a (13) szerinti sorvektor-mátrix szorzás eredményeképpen adódó új fuzzy halmazzal egyenértékű.

Az utolsó lépés ennek a fuzzy halmaznak a defuzzifikálása. Defuzzifikálásra a legegyszerűbb és leggyakrabban alkalmazott módszert javasoljuk, a súlypont módszert, mely az alábbi formula alapján határozható meg:

$$\text{prognózis}(n) = \frac{\sum_{k=1}^7 \mu_k(A_n(k))m(k)}{\sum_{k=1}^7 \mu_k(A_n(k))};$$

$$m(k) : \text{a } k\text{-adik intervallum középpértéke} \quad (14)$$

$$A_n(k) : \text{az } n \text{ évhez tartozó prognosztizált tagsági értékek}$$

A prognózis, azaz a defuzzifikált érték nem más, mint az idősor következő évbéli értékére vonatkozó jóslat. Éppen ennek meghatározása a jelen dolgozat fő célja. Mielőtt bemutatnánk a módszer által szolgáltatott eredményeket, röviden indokoljuk, hogy miért a súlypont módszert javasoljuk defuzzifikálásra. Ha a formulát kissé átalakítjuk, azt kapjuk, hogy a jóslat értéke

$$\text{prognózis}(n) = \frac{\mu_1(A_n(1))}{\sum_{k=1}^7 \mu_k(A_n(k))}m(1) + \frac{\mu_2(A_n(2))}{\sum_{k=1}^7 \mu_k(A_n(k))}m(2) + \dots$$

$$+ \frac{\mu_7(A_n(7))}{\sum_{k=1}^7 \mu_k(A_n(k))}m(7) = \text{Várható érték} \quad (15)$$

formulával is egyenértékű, ami nyilvánvalóan tekinthető egy várható értéknek [6], [7], mivel a normált tagsági értékek vektora

$$\left( \frac{\mu_1(A_n(1))}{\sum_{k=1}^7 \mu_k(A_n(k))}; \frac{\mu_2(A_n(2))}{\sum_{k=1}^7 \mu_k(A_n(k))}; \dots; \frac{\mu_7(A_n(7))}{\sum_{k=1}^7 \mu_k(A_n(k))} \right) \quad (16)$$

nyilván egy diszkrét valószínűség eloszlást alkot. Ilyen terminológia esetén, tehát hogy a defuzzifikált értékre úgy tekintünk mint egy valószínűségi változó várható értékére, még mélyebben tekinthető a kapcsolat a valószínűség elmélettel és így a Markov-láncok elméletével.

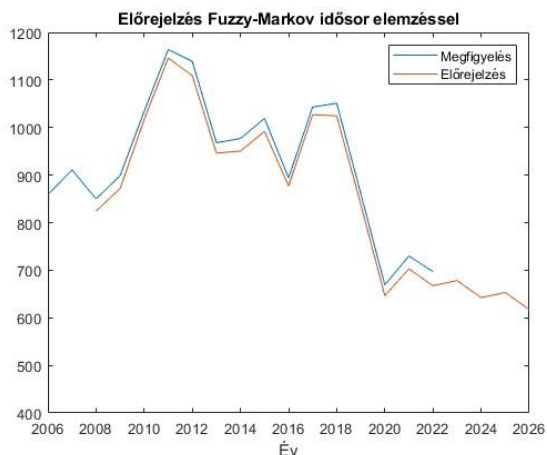
## 6 AZ IDŐSOR MODELLEZÉSE ÉS PROGNÓZISOK KÉSZÍTÉSE

Ebben a pontban bemutatjuk a fentiekben javasolt módszer alkalmazását az 1. táblázatban közölt idősorra vonatkozólag.

Alkalmazva a (13) képlet által definiált Markov-lánc jellegű algoritmust a 4. táblázatban foglalt fuzzy halmazokra a (11) által adott  $\mathbf{R}$  mátrix felhasználásával úgy, hogy a tagsági függvényeket az (5) képlet értelmezi



$c = 0,0001$  alakparaméter alkalmazása mellett, akkor először is a 4. ábrán látható eredményt kapjuk.



4. ábra

Mint azt az ábra is mutatja, a modell jól működik, a prognózis-idősor jól illeszkedik a megfigyelésekhez. Numerikusan az 5. táblázat tartalmazza a közelítésre vonatkozó adatokat és annak relatív pontosságát %-os formában a 2008-2022 időintervallumra vonatkozólag.

5. táblázat: Az idősor közelítése prognosztizált adatokkal

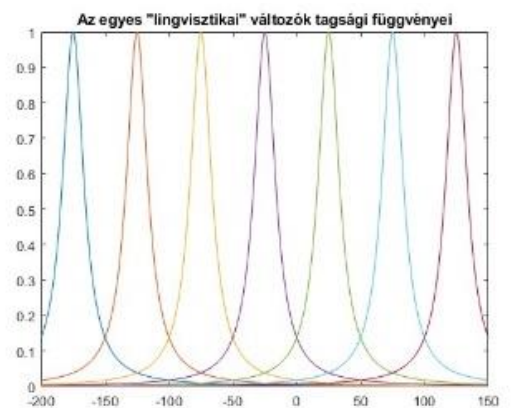
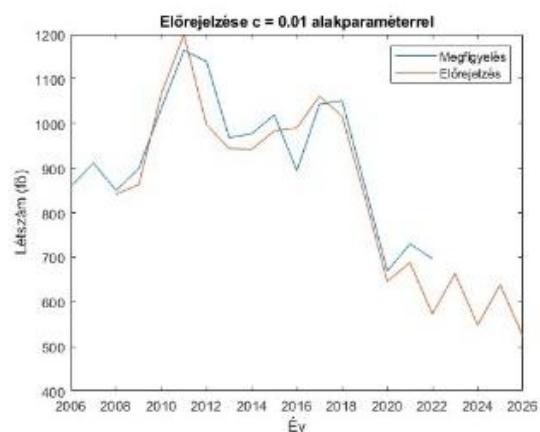
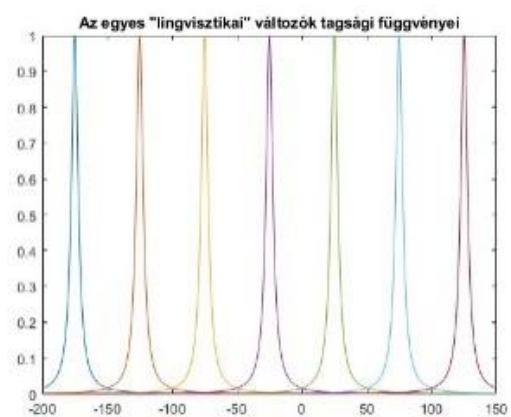
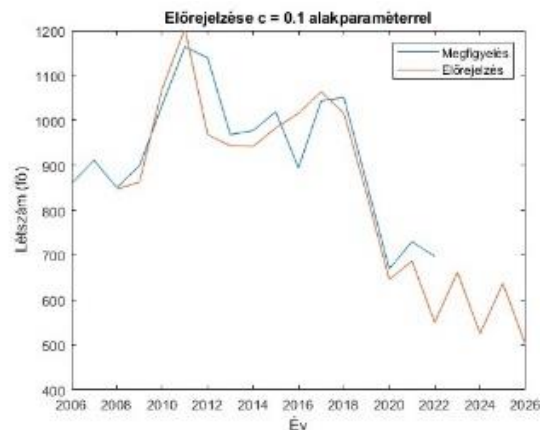
ssz.	Év	Megfigyelt adat	Prognózis	Relatív hiba %
1	2008	850	824,36	3,02
2	2009	899	871,81	3,02
3	2010	1034	1016,82	1,66
4	2011	1164	1146,20	1,53
5	2012	1139	1108,83	2,65
6	2013	968	946,18	2,25
7	2014	977	950,61	2,70
8	2015	1019	991,89	2,66
9	2016	894	877,18	0,88
10	2017	1043	1026,87	1,55
11	2018	1051	1024,63	2,51
12	2019	861	838,57	2,60
13	2020	669	646,58	3,35
14	2021	730	702,89	3,71
15	2022	697	667,46	4,24

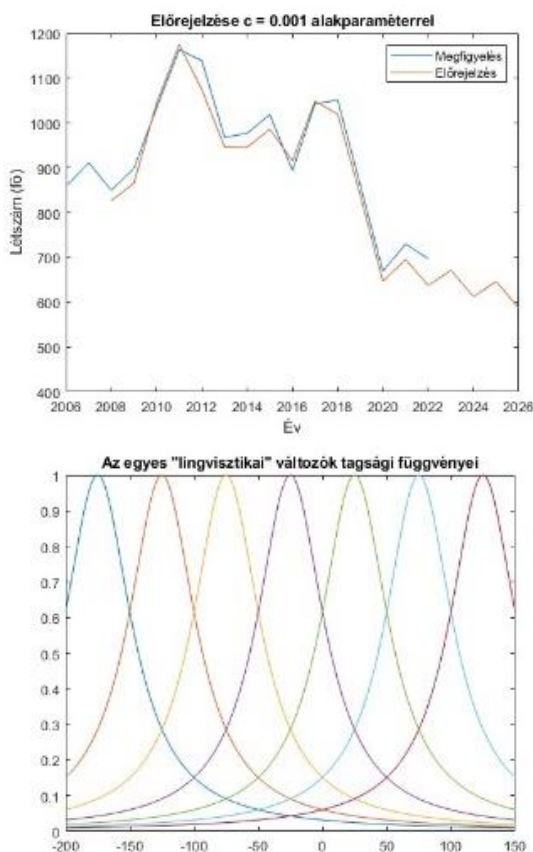
A közelítés pontosságára vonatkozó előírás vagy igény a felhasználó által van meghatározva. Véleményünk szerint az átlagosan 2-3%-os relatív pontosság kielégítőnek tekinthető.

A jövőre vonatkozó előrejelzések, melyek értékei  $Y_{2023} = 678$ ,  $Y_{2024} = 642$ ,  $Y_{2025} = 653$  és  $Y_{2026} = 617$  az 5. táblázat adatai, a tapasztalt relatív pontosság alapján válnak jogossá és elfogadhatóvá. Ezzel a bevezetőben kitűzött programot teljesítettük.

Befejezőképpen még azt vizsgáljuk meg, milyen hatása van a prognózis minőségére a  $c$  alakparaméter választásának. Mint korábban már megadtuk, az 5. táblázat illetve a 4. ábra grafikonja  $c = 0,0001$  paraméter érték esetén született. Nyilván felmerül a kérdés, hogyan módosul a helyzet, ha  $c$ -nek más értéket adunk.

Az 5. ábrán látható az eredmény grafikusan rendre  $c = 0,1$ ;  $c = 0,01$ ;  $c = 0,001$  paraméter értékek esetén.





5. ábra

Amit az ábráról leolvashatunk az, hogy minél jobban "elkentek" a tagsági függvények, más szóval minél nagyobb hatása van egymásra a rendszerbeli fuzzy halmazoknak, vagyis minél nagyobbak a tagsági függvény értékek, a közelítés pontossága annál jobb. Csupán vizuálisan összehasonlítva a 4. ábrát és az 5. ábra  $c = 0,001$  paraméter értékhez tartozó ábráját, úgy tűnhet hogy az utóbbi pontosabb. Azonban a számítások azt mutatják, hogy ez nem igaz, a relatív hiba jellemzően 1%-kal rosszabb  $c = 0,001$  esetén. Ha még tovább csökkentenénk a  $c$  értékét, elérhetnénk egy átlagos 2%-os relatív hibaszintet, ha erre szükség van, de nagyságrendi javulás a hibát tekintve már nem érhető el.

Hangsúlyozzuk, hogy a fenti számítások egységesen az (5) formula által definiált tagsági függvény esetére lettek elvégezve. A probléma vizsgálata elvégezhető más alakú függvényekkel is, amely eljárás lehetőséget ad a módszer esetleges továbbfejlesztésére, pontosítására.

## 7 KÖVETKEZTETÉSEK

A fentiekben bebizonyítottuk, hogy a fuzzy logika módszertana a Markov-láncok elméletével ötvözve egy alkalmas és hatékony módszer idősorok elemzésére, modellezésre és prognózisok készítésére. Az idősor egy állapotát, alkalmas tagsági függvény, és alkalmas paraméter választása esetén az adott időpontbeli változásnak megfelelő fuzzy halmaz jelenti, és a prognózis, az előrejelzés úgy adható meg, hogy a Markov-lánc következő állapotát egy újabb fuzzy halmazzal adjuk meg, amely a változás jóslott mértékének megfelelő fuzzy halmaz. Az idősor soron következő tagja pedig innen

valamely defuzzifikációs módszerrel adódik. A számításokhoz és az ábrák készítéséhez a Matlab szoftvert használtuk. Minden ábra és táblázat saját készítésű.

## HIVATKOZÁSOK

- [1] Box, Jenkins, 'Time Series Analysis, Forecasting and control', Wiley, 2016.
- [2] Lynwood A., Johnson, L.A, Montgomery, D.C, and Gardiner, J.S., Forecasting and Time Series Analysis. 2nd Edition. McGraw-Hill, Inc, 1990.
- [3] Box, Jenkins, Reinsel, Ljung: 'Time Series Analysis', Springer, 2016.
- [4] Guangming: Fuzzy Markov chains based on the fuzzy transition probability, IEEE Chinese Control and Decision Conference, 2014
- [5] Avrachenkov, Sanchez: Fuzzy Markov chains, Fuzzy Optimization and Decision Making, 2002
- [6] Ross: Stochastic processes, John Wiley and sons, USA, 1996
- [7] Karlin - Taylor: An introduction to stochastic modeling, Academic Press, London, 1998
- [8] Knill: Probability and Stochastic Processes with Applications, Overseas Press, India, 2006
- [9] László, Pokorádi ; Sinan, Kocak ; Edit, Tóth-Laufer: Fuzzy Failure Modes and Effects Analysis Using Summative Defuzzification Methods, ACTA POLYTECHNICA HUNGARICA 18 : 9 pp. 111-126. , 16 p. (2021)
- [10] Kóczy, Tikk: Fuzzy rendszerek, Typotex, Budapest, 2001
- [11] Paasino-Yurkovich: Fuzzy control, Addison-Wesley, USA, 1998
- [12] Meghdadi-Akbarzadeh: Probabilistic Fuzzy Logic and Probabilistic Fuzzy Systems, IEEE International Fuzzy Systems Conference, 2001