

# Körök mérésének befolyásoló tényezői profilprojektorral történő méréseknél

## Factors influencing the measurement of circles in profile projector measurements

Marczis Attila, Drégelyi-Kiss Ágota

\* Óbudai Egyetem Bánki Donát Gépész és Biztonságtechnikai Kar, Gyártástechnológiai Intézeti Tanszék,  
Budapest, Magyarország

[marczis.attila@phd.uni-obuda.hu](mailto:marczis.attila@phd.uni-obuda.hu), [dregelyi.agota@bgk.uni-obuda.hu](mailto:dregelyi.agota@bgk.uni-obuda.hu)

**Összefoglalás** — Az iparban a koordináta-méréstechnikai feladatokat a legkülönbözőbb módszereket alkalmazó berendezésekkel hajtják végre. Az egyik legáltalánosabban használt eszköz a profilprojektor, melynek a mérési bizonytalanságában több tényező játszik szerepet. Ezeknek a tényezőknek az ismerete elengedhetetlen a pontos és visszavezetett mérések esetében. A koordinátaméréstechnikában a mért pontokra ideális, 2 vagy 3 dimenziós geometriai alakzatokat illesztünk, melyeknek a vizsgálatával kaphatunk mérési eredményeket a vizsgálati darabról. Az alakzatok illesztését a mért pontokra többféle módszerrel lehet elvégezni. A cikkben egy Mitutoyo PJ-H3000F profilprojektorral történő köralakzat-mérésnél felmerülő befolyásoló tényezőket határozzuk meg. A cikkben összefüggéseket keresünk a mérési pontszám, a mért átmérő és a mérési hiba között.

**Kulcsszavak:** profilprojektor, metrológia, illesztési módszer, koordináta-méréstechnika

**Abstract** — Industry uses a variety of devices to measure dimensions. Profile projectors are widely employed in metrology, and numerous factors affect measurement uncertainty. These elements must be understood for precise and traceable measurements. In co-ordinate metrology, ideal 2 or 3 dimensional geometric shapes are fitted against measured points to determine actual measurement results. Several approaches can fit geometric shapes to measured points. We determine the elements that affect Mitutoyo PJ-H3000F profile projector measurements of circular forms in this study. The paper examines connections between the number of the measurement points, diameter, and measurement error.

**Keywords:** profile projector, metrology, fitting method, coordinate measuring

### 1 BEVEZETÉS

A profilprojektorok, vagy másképp nevezve optikai összehasonlító berendezések, sokoldalú eszközök melyet a világ minden táján alkalmaznak a mérés technikában. A berendezés alapkonceptiója, hogy egy nagyított árnyékképet vetít a munkadarabról egy vetítőernyőre, amin a méréseket elvégezhetjük. A munkadarab egy precíz asztalon helyezkedik el, amivel a fénysugárban lehet mozgatni, tehát a mérési pont a referencia pontra

mozgatható (szálkereszt). A pozíciót az asztal útmérő rendszeréről olvashatjuk le [1].

Az első optikai projektorokat röviddel az első világháború után fejlesztették ki azzal a szándékkal, hogy ellenőrizzék a menetkészítő szerszámok élének alakját. Mindamellett az első projektoroknak sok hátránya volt, például sötét szoba kellett az alkalmazásukhoz, hogy a kép látható legyen. A vetítőernyő túl messze volt a kezelőtől a megfelelő összehasonlításhoz, az árnyékkép és a mesterdarab között. Ezért beépítettek egy tükröt a vetített kép útjába, hogy a képet egy olyan vetítőernyőre irányítsa, ami a kezelő előtt van. Ezt az egészet behelyezték egy házba, ami által nem volt szükség a későbbiekben sötét szobára [1].

Bár a fő felhasználói az optikai projektoroknak a menetvágó szerszámok és magas minőségű menetes alkatrészek gyártói voltak, az alkalmazhatósága az új optikai mérőeszközöknek nem sokáig fókuszálódott erre a szűk területre. Az optikai projektor, mint sokoldalú, megbízható mérőeszköz hamar széles körben elterjedt az iparban [1].

Elsődleges célja a profilprojektor, hogy egy torzításmentes nagyított árnyékképet vetítsünk a vetítőernyőre, ahol kényelmesen vizsgálható. Ahhoz, hogy ezt elérjük a következő alapelemekre van szükség:

- A fényforrás, aminek erősnek kell lennie, hogy nagyobb nagyításokon is éles projekciót kapjunk.
- A párhuzamosító lencse, aminek a szerepe, hogy úgy törje meg a fényt, hogy egy olyan fénynyalábot alkosson, ami párhuzamos fénysugarakból áll és a vizsgált területen a fényerőssége egyenlő.
- A vetítő lencserendszer, ami nagyítja és továbbítja a munkadarab kontúrját vagy a képet, ami a párhuzamosított fénysugarak által keletkezik.
- A vetítőernyő, amin a vetített kontúr vagy kép megjelenik és ezáltal vizsgálhatóvá válik.
- A cikkben ismertetett vizsgálat célja, hogy a körök mérésének a befolyásoló tényezőit meghatározzam profilprojektorral történő mérések esetén.

## 2 ANYAG ÉS MÓDSZER

### 2.1 Köralakúság meghatározásának módszerei

A köralakúság definíciója ISO 1101:1017 [2] szerint: egy tűrt átmérő esetén a munkadarab a köralakúságnak megfelel, ha az adott keresztmetszet külső pontjai két koncentrikus kör között úgy helyezkednek el, hogy a két kör közötti sugár irányú különbség egyenlő vagy kisebb a megadott tűrés értékénél. A koncentrikus körök középpontját és a sugarukat úgy kell megválasztani, hogy a sugár irányú különbségük a legkisebb legyen.

Egy mért ponthalmazra matematikai módszerek segítségével többféle kört lehet illeszteni. A mérés technikában leggyakrabban használt illesztési módszerek:

- Legkisebb négyzetes eltérések módszere (LSC, *least square circle*, Gauss-kör)
- Legkisebb köré írható kör (MCC, *minimum circumscribed circle*)
- Legnagyobb beleírható kör (MIC, *maximum inscribed circle*)
- Minimum zóna módszer (MZC, *minimum zone circle*)

A fejezet további részében a fent említett négy módszer kerül ismertetésre matematikai szempontból. A módszerek áttekintése során a legnagyobb hangsúlyt a legkisebb négyzetes eltérések módszere kapja, mivel ez a módszer a legelterjedtebb. A legkisebb köré írható és a legnagyobb beleírható kört akkor használják, ha technológiai szükségessége van (pl. illesztéseknél).

#### 2.1.1 Legkisebb négyzetes eltérések módszere geometriai megközelítéssel (LSC)

A Legkisebb négyzetes eltérések módszere az átlagos négyzetes távolság minimalizálásán alapszik, az illesztett kör és a mért pontok között sugárirányban. Adott  $n$  pont  $(x_i, y_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , eszerint a célfüggvény definiálható:

$$\mathcal{F} = \sum_{i=1}^n d_i^2 \quad (1)$$

ahol:  $d_i$ : az euklidészi (geometriai) távolság a pont  $(x_i, y_i)$  és az illesztett kör között sugárirányban. Kör illesztésénél a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad (2)$$

ahol  $(a, b)$  a kör középpontjának koordinátái és  $R$  a kör sugara. Ezután felírhatjuk a távolságokat:

$$d_i = r_i - R \quad (3)$$

ahol:  $r_i$ : az illesztett kör középpontjától a távolság a mért pontig:

$$r_i = \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2} \quad (4)$$

(4)-t behelyettesítve (3)-ba:

$$d_i = \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2} - R \quad (5)$$

Ez a módszer a legáltalánosabb körillesztési módszer, azonban nincs közvetlen algoritmus a legkisebb négyzetes eltérések körillesztésére. (1) minimalizálása nemlineáris probléma, aminek nincs zárt formulás megoldása, ezért az összes ismert algoritmus iteratív [3], [4], [5], [6].

Hogy biztosítsuk a momentumok létezését bevezethetünk egy új paramétersémát. Egy elegáns módra tett javaslatot Pratt [7], amely egy egyenlet formájában írja le a kört:

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad (6)$$

Ahol:  $A, B, C, D$ : változók,

$x, y$ : a pont koordinátái.

Egy nyilvánvaló kitételnek teljesülnie kell:  $A \neq 0$  (különben ez az egyenlet egy egyenest írna le) és egy másik kitételnek is teljesülnie kell:  $B^2 + C^2 - 4AD > 0$ . Az utóbbi kitétel jobban észrevehetjük, ha másképp írjuk fel az egyenletet:

$$\left(x - \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(y - \frac{C}{2A}\right)^2 - \frac{B^2 + C^2 - 4AD}{4A^2} = 0 \quad (7)$$

Egyértelműen látható, hogy (6) csak akkor ír le egy kört, ha  $B^2 + C^2 - 4AD > 0$  [3].

Az előzőekből következik, hogy a paramétereket  $(A, B, C, D)$  egy skaláris számmal kell meghatározunk, ebből természetes módon adódik a kikötés:

$$B^2 + C^2 - 4AD = 1 \quad (8)$$

(8) automatikusan biztosítja, hogy  $B^2 + C^2 - 4AD > 0$ . A (6) kikötés javaslatával először Pratt [7] állt elő [3].

A (6) egyenlet a (8) kikötéssel megfelelően leírja az összes kört és egyenest (az utóbbit akkor, ha  $A=0$ ). Miután előállítottuk az algebrai kör paramétereit  $(A, B, C, D)$ , át tudjuk konvertálni őket a természetes paraméterekbe:

$$a = -\frac{B}{2A}, \quad b = -\frac{C}{2A}, \quad R^2 = \frac{B^2 + C^2 - 4AD}{4A^2} \quad (9)$$

ahol:  $(a, b)$ : az illesztett kör középpontjának koordinátái  
 $R$ : az illesztett kör sugara [3].

#### 2.1.2 Legkisebb négyzetes eltérések módszere algebrai megközelítéssel (LSC)

Alternatívák a bonyolult geometriai illesztésekre a nem iteratív módszerek, az algebrai körillesztések. Az algebrai módszerek előnye, hogy ezeknél zárt formulás egyenletekkel lehet meghatározni a legjobban illeszkedő kört a ponthalmazra, de egy kis hibát mindegyik tartalmaz, tehát csak közelíti a legkisebb négyzetes eltérések módszerével előállított kört. A legkisebb négyzetes eltérések módszerénél mindig kell egy kezdeti becslést adnunk a kör középpontjára és sugarára, ahonnan az iteratív geometriai algoritmus kiindulhat. Minél pontosabb a kezdeti becslésünk, annál kisebb az esély, hogy az iterációk során a minimalizálandó függvény egy lokális minimumát találjuk meg. Az alábbiakban a leggyakrabban használt 3 algebrai módszert ismertetem.

A Kasa illesztési módszer a következő függvény minimalizálásával találja meg a legjobban illeszkedő kört:

$$\mathcal{F}_K = \sum_{i=1}^n (r_i^2 - R^2)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 - 2ax_i - 2by_i + a^2 + b^2 - R^2)^2 \quad (10)$$

ahol:  $(x_i, y_i)$ : a mért pontok koordinátái;  
 $(a, b)$ : az illesztett kör középpontjának koordinátái;  
 $R$ : az illesztett kör sugara;  
 $r_i$ : az illesztett kör középpontjától a távolság a mért pontig.

Másképp felírva a függvényt:

$$\mathcal{F}_K = \sum_{i=1}^n f_i^2 \quad (11)$$

ahol:  $f_i = r_i^2 - R^2$ , ami az úgynevezett algebrai távolság a pont  $(x_i, y_i)$  és az illesztett kör között.

Ha a paramétereket átírjuk:  $B = -2a, C = -2b, D = a^2 + b^2 - R^2$ , akkor (6) a következők szerint módosul:

$$\mathcal{F}_K = \sum_{i=1}^n (z_i + Bx_i + Cy_i + D)^2 \quad (12)$$

ahol:  $z_i = x_i^2 + y_i^2$ .

Szándékosan hagytuk el a jelölésből az  $A$ -t, hogy a soron következő módszer ismertetésénél megmaradjon a következtetés. Az újonnan létrejött egyenlet már lineáris egyenletrendszer eredményez  $B, C, D$ -nek köszönhetően [3] [6].

A Kasa illesztés talán a leggyorsabb algoritmus, de pontatlan, ha a kör mentén a pontok nem folytonosan vannak felvéve (csak a körnek egy szakaszán), illetve kis körök esetén. Az eltérés oka, hogy az algebrai távolságok  $f_i$  rosszul közelítik a geometriai távolságokat  $d_i$ , tulajdonképpen:

$$f_i = (r_i - R)(r_i + R) = d_i(2R + d_i) \approx 2Rd_i \quad (13)$$

ennek következtében az algoritmus az  $\mathcal{F}_K \approx 2R^2 \sum d_i^2$  függvényt minimalizálja. Ez gyakran okozza azt, hogy kis köröknél az algoritmus  $R^2$ -et minimalizálja a geometriai távolságok  $d_i$  helyett [3] [6].

A Kasa módszer teljesítményének növelése érdekében a Kasa módszer függvényét kiegészítették egy taggal (Pratt módszer) és így:  $\mathcal{F} = \frac{1}{4R^2} \mathcal{F}_K$  függvényt minimalizálják. Ez a függvény jobb közelítést ad a geometriai távolságokra, azaz:  $\sum d_i^2$ -re. Az új egyenlet  $A, B, C, D$  tagokkal kifejezve (9) szerint:

$$\mathcal{F}_P = \sum \frac{[Az_i + Bx_i + Cy_i + D]^2}{B^2 + C^2 - 4AD} \quad (14)$$

(8) kikötéssel lehet egyszerűsíteni a függvényt [3] [7]:

$$\mathcal{F}_P(A, B, C, D) = \sum [Az_i + Bx_i + Cy_i + D]^2 \quad (15)$$

Egy kicsit eltérő módszert közölt Taubin [3], aki a következő egyenletet minimalizálta:

$$\mathcal{F}_T = \frac{\sum [(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 - R^2]^2}{4n^{-1} \sum [(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2]} \quad (16)$$

$A, B, C, D$  változókkal kifejezve (9) szerint:

$$\mathcal{F}_T = \sum \frac{[Az_i + Bx_i + Cy_i + D]^2}{4n^{-1} \sum [4A^2z_i + 4ABx_i + 4ACy_i + B^2 + C^2]} \quad (17)$$

Ha teszünk egy kikötést:

$$4A^2\bar{z} + 4AB\bar{x} + 4AC\bar{y} + B^2 + C^2 = 1 \quad (18)$$

ahol:  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$ , stb.,

akkor tulajdonképpen megkapjuk (15) egyenletet.

Általános megjegyzések: (15) minimalizálásához kell tennünk néhány kikötést, hogy elkerüljük a triviális megoldást:  $A=B=C=D=0$ . Pratt (8) kikötést használja, Taubin (18) kikötést. A Kasa illesztési módszer ugyancsak (15) egyenletet minimalizálja, de  $A=1$  kikötéssel [3].

### 2.1.3 A legkisebb köréírható kör (MCC)

A legkisebb köré írható kör problémája matematikailag leírva:

$$\begin{cases} \min r_L \\ (x_{0L} - x_i)^2 + (y_{0L} - y_i)^2 \leq r_L^2, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (19)$$

ahol:  $r_L$ : az illesztett kör sugara,

$x_{0L}; y_{0L}$ : az illesztett kör középpontjának koordinátái,

$x_i; y_i$ : a mért pontok koordinátái.

A mért pontoknak a körön belül kell elhelyezkedniük, úgy hogy a kör sugara a lehető legkisebb legyen. Ezt a kört különböző iterációs módszerekkel lehet meghatározni. Nem létezik algebrai közelítése a problémának, mint a legkisebb négyzetek módszerének [8].

### 2.1.4 A legnagyobb beleírható kör (MIC)

A legnagyobb bele írható kör problémája matematikailag leírva:

$$\begin{cases} \max r_B \\ (x_{0B} - x_i)^2 + (y_{0B} - y_i)^2 \leq r_B^2, \quad i = 1, \dots, n \\ (x_{0B}, y_{0B}) \in \text{Conv}\{x_i, y_i\}, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (20)$$

ahol:  $r_B$ : az illesztett kör sugara,

$x_{0B}; y_{0B}$ : az illesztett kör középpontjának koordinátái,

$x_i; y_i$ : a mért pontok koordinátái,

$\text{Conv}$ : a legkisebb konvex burkoló elem, ami magában foglalja az összes  $x_i; y_i$  pontot.

Az összes pont az illesztett körön kívül kell elhelyezkednie, úgy hogy közben az illesztett kör sugara a lehető legnagyobb legyen és a kör középpontja a ponthalmazra illeszthető legkisebb konvex burkolóelemen belül helyezkedjen el [8].

### 2.1.5 A minimum zóna kör (MZC)

A minimum zóna módszer matematikai problémája a következőképpen írható le:

$$\begin{cases} \min(r_{max} - r_{min}) \\ r_{min}^2 \leq (x_{0z} - x_i)^2 + (y_{0z} - y_i)^2 \leq r_{max}^2, \\ i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (21)$$

ahol:  $(r_{max} - r_{min})$ : a két koncentrikus kör sugarának különbsége

$x_{0z}; y_{0z}$ : az illesztett körök középpontjának koordinátái,

$x_i; y_i$ : a mért pontok koordinátái.

Ez a módszer két koncentrikus kör sugár irányú különbségét minimalizálja. A kisebbik kör a ponthalmazon belül helyezkedik el, mindegyik pont a körön kívül helyezkedik el. A nagyobbik kör az összes pontot tartalmazza [2], [8], [9].

A köralakúság definíciójának ezzel a módszerrel meghatározott köralakúsági hiba felel meg a leginkább, ezért abban az esetben, amikor nem az illesztések az elsődlegesek, akkor ezt a becslést javasolt használni.

### 2.2 Kalibrálógyűrűk

A kalibrálógyűrűket általában mérőeszközök ellenőrzésére, beállítására és nullpont felvételre használják. A gyűrűk idomszeracéلبól készülnek, edzve, feszültségmentesítve, köszörülve és leppelve vannak. A pontos méretük rá van írva, azzal a hőmérséklettel együtt, amin tartják a ráírt méretet. A mérendő munkadarabok megválasztásánál fontos szempont volt, hogy az alakhiba minimális legyen, vagyis ne növelje a mérés bizonytalanságát túlságosan. Fontos megemlíteni, hogy a kalibrálógyűrűk élettörése nagyon kicsi, ezért profilprojektorral történő mérés során rá lehet fókuszálni a felső élre. A következő névleges furatméretű kalibrálógyűrűket használtam a mérés során:

- $\varnothing 6^{+0,012}$  mm.
- $\varnothing 12,0000$  mm.
- $\varnothing 25^{+0,001}$  mm.
- $\varnothing 60_{-0,001}$  mm.
- $\varnothing 100_{-0,001}$  mm.

### 2.3 A referenciamérésekhez használt mérőgépek

*Zeiss ULM450 univerzális hossz mérő gép*

Adatok:

- Felbontóképesség: 1  $\mu$ m
- Mikrométerorsó osztásértéke: 0,01 mm
- A készülék szórása:  $\pm 0,15 \mu$ m
- Mérési bizonytalanság mérőlámpás méréseknél és belső méreteknél (Uc):

$$\pm(2 + L/100) \mu m \quad (22)$$

ahol L a mérőszám a mérési hosszra mm-ben. Egy léptékvonás használata esetén, mérőlámpás és különbségméréseknél a bizonytalanság csak 1  $\mu$ m.

- Mérési tartomány furatméresnél: 1-50 mm-ig.
- A gép méretei: 890 mm, 350 mm, 500 mm (hossz, mélység, magasság).
- Az asztal adatai:
- Mérete: 160 mm x 160 mm.
- A magassága 0-tól 105 mm-ig állítható.
- Y irányban 0-tól 25 mm-ig állítható.
- A gép hossz tengelye körüli dönthetősége:  $\pm 3^\circ$ .
- A hossz tengelyre merőleges tengely körüli dönthetősége:  $\pm 4^\circ$ .

*Zeiss egytetemes mérő mikroszkóp*

Adatok:

- Felbontóképesség: 1  $\mu$ m
- Mikrométerorsó osztásértéke: 0,01 mm
- A készülék szórása:  $\pm 0,15 \mu$ m
- Az asztal méretei: 260 mm x 270 mm
- A mérési bizonytalanság érintés nélküli (mikroszkópos) mérésnél:

$$\pm \left( 3,5 \frac{L}{130} + \frac{H \cdot L}{4000} \right) \mu m \quad (23)$$

ahol: H: a mérési sík magassága az asztal síkjától mm-ben,  
L: mérőszám a mérési hosszra mm-ben.

### 2.4 A profilprojektoros mérések

A vizsgálathoz egy Mitutoyo PJ-H3000F típusú profilprojektort használtunk, melynek a jellemzői:

- Felbontóképesség X és Y irányban: 1  $\mu$ m
- Az asztal méretei: 200 mm x 100 mm
- A mérési bizonytalanság:

$$\left( 3 + \frac{L}{50} \right) \mu m \quad (24)$$

ahol: L: mérési hossz mm-ben.

Nagyítás: 10x, 50x.

A méréseket a mérési pontszám szisztematikus változtatásával végeztük a különböző átmérőjű kalibrálógyűrűkön. A mérési pontokat a furat kerülete mentén nagyjából egyenlő távolságokra vettük fel. Hosszabb mérési szünetekben a profilprojektor világítását lekapcsoltuk, hogy minél kisebb mértékben befolyásolja a lámpa hője a gyűrűk méretét.

Az öt különböző átmérőre 3, 5, 7, 9 és 15 pontot vettünk fel és minden mérést háromszor végeztünk el, ez összesen 585 mérési pontot jelent:

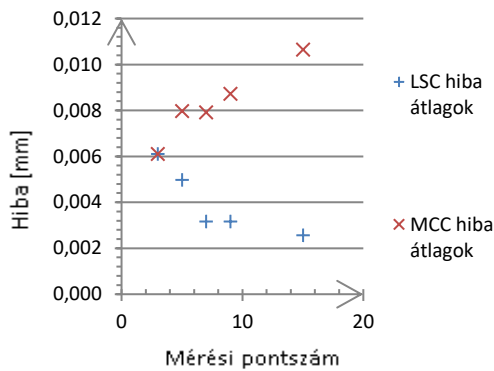
$$[(3 + 5 + 7 + 9 + 15) \cdot 5] \cdot 3 = 585 \text{ pont} \quad (25)$$

A mérési pontokra a körillesztéseket a Matlab program segítségével végeztük. A kísérlet során használt illesztési Matlab programok interneten elérhetők. A program bemenete a pontok X és Y koordinátái, kimenete pedig az illesztett kör középpontjának X és Y koordinátái és a kör sugara.

### 3 EREDMÉNYEK ÉS STATISZTIKAI ELEMZÉS

#### 3.1 LSC és MCC körök

A mérési hiba a mért értékek és a helyes érték különbségét jelenti. Kiszámítottuk az egyes kalibrálógyűrűk esetén a mérési hibákat, majd képeztük ezeknek a mérési hibáknak az átlagait a mérési pontszámok szerint az összes vizsgálatba vont kalibrálógyűrű esetén. Az 1. ábrán mérési hibák átlaga látható a pontszámok függvényében. A diagramon egy pont a 6, 12, 25, 60 és 100 mm-es kalibráló gyűrűkre felvett pontokra illesztett LSC vagy MCC körök eltéréseinek az átlagát jelenti. Jól látható, hogy a mérési pontszám növekedésével az LSC körök eltérése a tényleges értéktől csökken, tehát minél több pontot veszünk fel a kerület mentén, annál pontosabb lesz az illesztett kör átmérője. Az MCC körök esetén fordított tendenciát láthatunk, minél több pontot veszünk fel a kerület mentén, annál nagyobb lesz a körök hibája.



1. ábra: A mérési hibák értékeinek átlaga a mérési pontszám függvényében

A 2. ábrán szintén az eltérések átlaga látható, de az átmérők függvényében. A diagramon egy pont a 3, 5, 7, 9 és 15 pontra illesztett körök eltéréseinek átlagát jelöli a referenciaátmérőhöz. Az adatokra hatványfüggvény illeszthető jó közelítéssel.

Az LSC körök hibáját az átmérő függvényében a következő egyenlettel írhatjuk le:

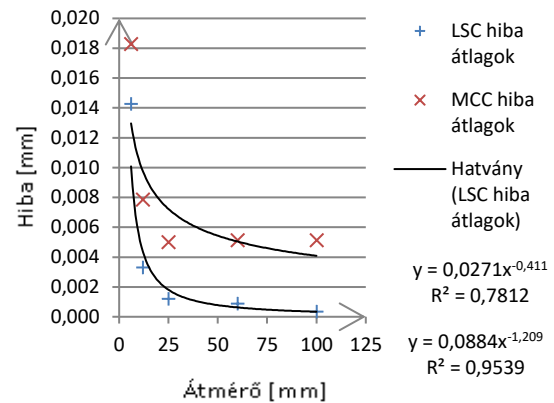
$$\text{Mérési hiba (LSC)} = 0,0884 \cdot d^{-1,209} \quad (26)$$

ahol  $d$ : a mért átmérő értéke mm-ben.

Az MCC körök hibáját az átmérő függvényében a következő egyenlettel lehet közelíteni:

$$\text{Mérési hiba (MCC)} = 0,0271 \cdot d^{-0,411} \quad (27)$$

ahol  $d$ : a mért átmérő értéke mm-ben.



2. ábra: A mérési hibák átlaga az átmérők függvényében

A függvénykapcsolatokból látható, hogy mindkét matematikai számítási módszer esetén a 25 mm-es átmérőnél nagyobb méretű idomszerek esetén a mérési hiba értéke állandósul. Ebből arra lehet következtetni, hogy a 25 mm-nél kisebb körök átmérőjének meghatározása során a mérési hiba (a mérés torzítása) jelentősen befolyásolja a mérési eredményt. Az befolyásolhatja a mérést, hogy a profilprojektor vetítőernyőjén a szálkereszttel azonos nagytás mellett a különböző átmérők esetén változó görbületű kontúrra kell ráállni, illetve a szálkereszt vastagsága állandó, a mért átmérők értéke viszont változó.

#### 3.2 ANOVA (szórásanalízis)

Az összes mérési hibát kiszámítottuk, és szórásanalízissel megvizsgáltuk, hogy a mérési pontszámok változtatása vagy a különféle méretű kalibrálógyűrűk szignifikánsan különböző eredményeket adnak-e.

A vizsgálati modell a következő egyenlettel írható le:

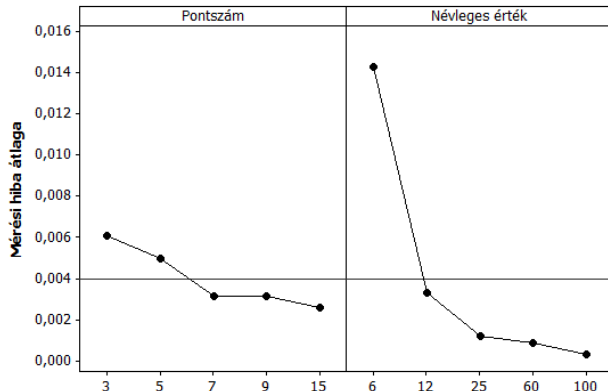
$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{jk} \quad (28)$$

ahol:  $y_{ijk}$ : k-dik mért adat,  
 $\mu$ : a várható érték,  
 $\alpha_i$ : i-dik pontszám,  
 $\beta_j$ : j-dik gyűrű méret,  
 $\varepsilon_{ijk}$ : a kísérleti hiba.

A szórásanalízis megmutatta, hogy a kalibráló gyűrűk méretének 95%-os szignifikancia szinten hatása van a mérési hiba értékeire, vagyis nem elhanyagolható, melyik gyűrűt mérjük, mert a mérési hiba mértéke változik. A mérési pontszámoknak nincs hatása a mérési hiba értékeire 95%-os szinten ( $p > 0,05$ ).

A főhatásra (3. ábra) megmutatja, hogy átlagosan a mérési hibát hogyan befolyásolja a mérési pontszám és a kalibráló gyűrű mérete. Látható, hogy a mérési pontszám növekedésével csökkenés van a mérési hiba átlagos értékében az összes vizsgált esetet figyelembe véve, de ez nem szignifikáns mértékű összvetve a gyűrűk méretének növekedése okozta hatással.

A faktorok (mérési pontszám és kalibráló gyűrű mérete) között nem mutatható ki kölcsönhatás.



3. ábra: Főhatásábra

### 3.3 Szórásanalízis az egyes kalibrálógyűrűkre

Vizsgálatunk során a profilprojektorral történő ismételt mérések ingadozását határozzuk meg a továbbiakban. Ez esetben minden gyűrű esetén külön meghatározzuk az ismételt mérések szórását az adott gyűrűhöz tartozó összes mérés figyelembevételével. A vizsgálat során használt vizsgálati modellt a következő egyenlet írja le:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \quad (29)$$

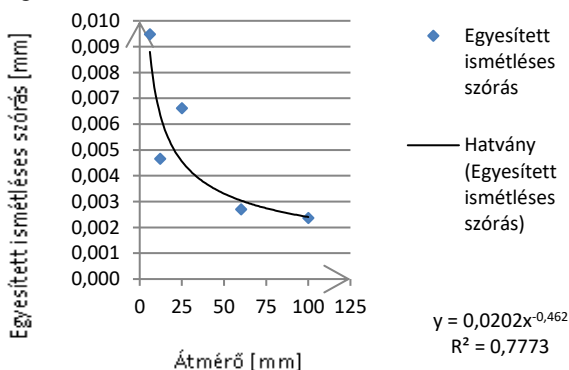
ahol:  $y_{ij}$ : k-dik mért adat,

$\mu$ : a várható érték,

$\alpha_i$ : i-dik pontszám,

$\varepsilon_{ij}$ : a ismétléses hiba.

Minden kalibrálógyűrű mért értékére végeztünk egy faktoros, a mérési pontszám és az átmérő szerinti szórásanalízist, és meghatároztuk az adott kalibrálógyűrűhöz tartozó egyesített ismétléses szórás értékét. Az eredmények azt mutatták, hogy a mérési pontszámnak nincs hatása a mérési hiba értékére 95%-os szignifikancia szinten.



4. ábra: Az egyesített ismétléses szórások az átmérő függvényében

Az ismétléses szórások az átmérő függvényében az 4. ábrán láthatók. A diagramon látható, hogy minél nagyobb a vizsgált átmérő, az ismétléses szórás annál kisebb. Ennek oka az lehet, hogy a profilprojektor nagyítási értékének

beállítása mellett változó átmérők mérése esetén a szálkereszttel változó görbületű kontúrra kell ráállni. Tehát minél nagyobb a vizsgált átmérő, annál kisebb görbületű a kontúr, amire a vetítőernyőn a szálkereszttel rá kell állni. További ok lehet még az, hogy a szálkereszt vastagsága állandó, a vizsgált átmérők viszont változó nagyságúak.

Az ismétléses szórásra az alábbi egyenlet írható fel:

$$u_{ismétlés} = 0,0202 \cdot d^{-0,462} \quad (30)$$

ahol  $d$ : a mért átmérő értéke.

## 4 KONKLÚZIÓ

A mérések és az elemzések elvégzése után elmondható, hogy a profilprojektorral történő mérés során a mérési pontszámoknak nincs szignifikáns hatása a mért eredményekre, ellenben a kalibráló gyűrűk mérete szignifikáns hatással bír. Az illesztési módszerek között gépészeti szempontból elhanyagolható különbséget tapasztaltunk. A Kasa és Pratt körillesztési módszerrel illesztett körök átmérője a geometriai LSC módszerrel illesztett körök átmérőjénél mindössze nanométeri nagyságrendű különbség volt. A Taubin algebrai módszerrel illesztett körök átmérője a kijelvezhető tíz tizedes jegyig (milliméter esetében) nem mutatott eltérést a geometriai LSC módszerhez képest. A legkisebb köré írható köröknél elmondható, hogy minél több pontszámra illesztjük a kört, annál nagyobb lesz az LSC körtől való eltérése.

A vizsgálatunk által fény derült a profilprojektor azon tulajdonságára, hogy kis átmérőknél a hiba értéke nagyobb mint nagy átmérők esetén. Elmondható, hogy 25 mm-es vagy nagyobb átmérők mérésénél és LSC körillesztéssel a hiba értéke 2 mikrométer alatti értéken állandósulni látszik.

A továbbiakban célszerű lenne vizsgálni a profilprojektorral történő átmérő meghatározás során a nagyítási érték hatását az illesztett körök átmérőjének hibájára, eltérésére a helyes értéktől. Lehetne vizsgálni a legnagyobb beleírható (MIC), és a minimum zóna (MZC) körök jellemzőit a mérési pontszám és az átmérő függvényében. További vizsgálatokat lehetne folytatni arra vonatkozóan, hogy a pontokat a kalibráló gyűrűkre egymástól nem egyenlő távolságokra vesszük fel a teljes kerület mentén, hanem csak negyed, fél és háromnegyed körív mentén elosztva, így az egyes LSC matematikai módszereket ismét össze lehetne hasonlítani egymással.

## IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Farago, F. T., & Curtis, M. A. (1994). *Handbook of dimensional measurement*. Industrial Press Inc..
- [2] ISO 1101:2017 Geometrical product specifications (GPS) — Geometrical tolerancing — Tolerances of form, orientation, location and run-out
- [3] Al-Sharadqah, A., & Chernov, N. (2009). Error analysis for circle fitting algorithms. *Electronic Journal of Statistics*, 3, 886-911.
- [4] Chernov, N., & Lesort, C. (2005). Least squares fitting of circles. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 23(3), 239-252.
- [5] Gander, W., Golub, G. H., & Strebel, R. (1994). Least-squares fitting of circles and ellipses. *BIT Numerical Mathematics*, 34(4), 558-578.

- [6] Umbach, D., & Jones, K. N. (2003). A few methods for fitting circles to data. *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, 52(6), 1881-1885.
- [7] Pratt, V. (1987). Direct least-squares fitting of algebraic surfaces. *ACM SIGGRAPH computer graphics*, 21(4), 145-152.
- [8] Maresca, P., Gomez Garcia, E., Caja Garcia, J., Barajas Fernandez, C., & Berzal Rubio, M. (2011). A proposal for the metrological characterization of circular features with digital optical machines. *American Institute of Physics-AIP Conference Proceedings*/Volume 1431.
- [9] Maresca, P., Gómez, E., Caja, J., Barajas, C., & Berzal, M. (2010). Use of coordinate measuring machines and digital optical machines for the geometric characterization of circumference arcs using the minimum zone method. *Measurement*, 43(6), 822-836.